



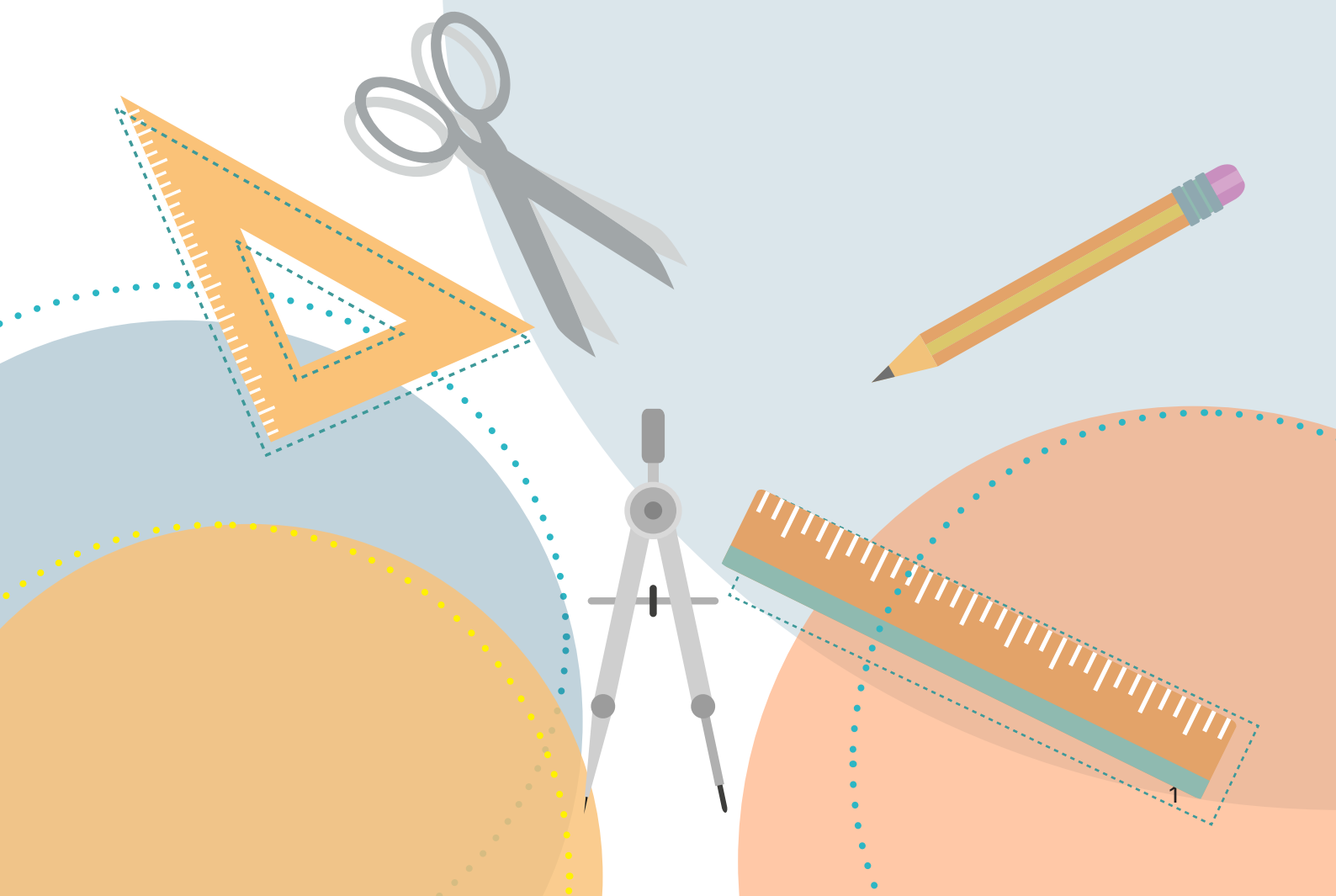
AGATA LUDWA
MATEMATYKA.
CO ZROBIĆ, ABY UCZNIOWIE
MYŚLELI, DYSKUTOWALI,
ROZWIĄZYWALI PROBLEMY?

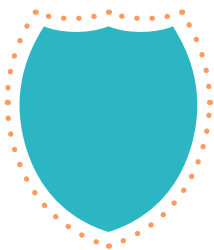
WSTĘP

Jakże często spotykamy się z przekonaniem, że matematyka jest trudna. Czasem słyszymy, że jest też nudna czy nawet nieprzydatna. A przecież stanowi ważną część naszej kultury. Niezauważalnej kultury myślenia, wnioskowania, kojarzenia – czyli umiejętności, których każdy dorosły i nie tylko dorosły człowiek potrzebuje każdego dnia.

Skąd więc to nastawienie? Warto je zmieniać i od pierwszych lat w szkole podstawowej uczyć matematyki ciekawej, zajmującej, trochę na zasadzie rozkoszy łamania głowy, a nie ćwiczenia żmudnych i mozolnych schematów.

W tym opracowaniu przedstawiam propozycje takiego uczenia matematyki, w którym dużo miejsca pozostawiamy na samodzielność, inicjatywę, własne poszukiwania rozwiązywania problemów. Warto przy tym pamiętać o współpracy w parach czy w grupach. Budujmy odwagę dzieci tak, aby rozwiązywanie problemów stało się wyzwaniem. Takie podejście przyda się każdemu nie tylko przy zadaniach matematycznych. Oby nasz optymizm i zapał do uczenia matematyki był zaraźliwy!





Motywacja i poczucie bezpieczeństwa dzieci. Działamy pozytywnie.

Wielokrotnie powtarzamy tezę o wspieraniu dzieci. Tak często, że staje się ona truizmem. Przyjrzyjmy się jednak temu, jak to wsparcie często wygląda. Czy jest to wiara w możliwości dzieci, w to, że same dojdą do poprawnego rozwiązania?

Czy raczej – w lepszym przypadku – udzielamy podpowiedzi przed usłyszeniem odpowiedzi ucznia, czy – w gorszym – od razu, niezwłocznie po postawieniu pytania przekazujemy nasze nauczycielskie tłumaczenie. Czasem po prostu wrywają się do odpowiedzi dwie lub trzy osoby (ciągle te same), a nauczyciel pozwalając podać im rozwiązanie, nie czeka na namysł i propozycje innych dzieci. Czy należy się dziwić, że w którymś momencie te niezgłaszające się dzieci już nie próbują? Czasem nawet wyłączają się z przebiegu lekcji lub nastawiają tylko na spisywanie z tablicy właściwych, poprawnych rozwiązań. Tego typu praktyki budują bierne postawy większości uczniów. A nie tego przecież chcemy.

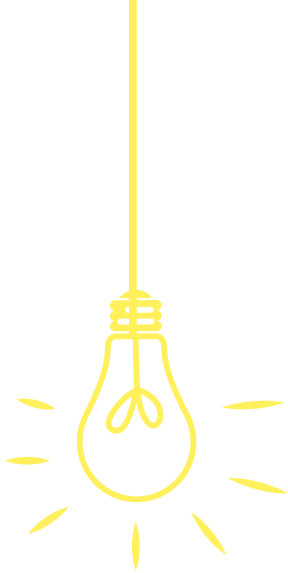
W takim razie może lepiej wrywać do odpowiedzi niezgłaszających się, cichych uczniów? Niejako za karę mają podawać rozwiązania? Trudno o gorszą zachętę.

O korzyściach z losowania.

Od kilku lat Centrum Edukacji Obywatelskiej upowszechnia metody stosowane w ocenianiu kształtującym. Jedną z metod godnych polecenia, nie tylko w szkołach stosujących ocenianie kształtujące, jest metoda losowania patyczków (Sterna 2014: 118). Na patyczkach uczniowie zapisują swoje imiona i ewentualnie nazwiska.



Patyczki służą do wyłonienia osoby do odpowiedzi na pytanie nauczyciela lub do wylosowania grup czy par. Zajmijmy się tym pierwszym przypadkiem. Nauczyciel zadaje pytanie, daje czas do namysłu i do ewentualnej konsultacji z koleżanką/kolegą w parze lub z całą grupą. To bardzo ważne, aby dać czas do namysłu, o czym jeszcze za chwilę. Zatem wylosowaliśmy dziecko, które podaje wynik. Nie ustosunkowujemy się jeszcze do poprawności odpowiedzi. Może jest kilka wyników? Zapytajmy o to klasę. Można ewentualnie wylosować kolejnego ucznia. Jeżeli rozwiązania są różne, w naturalny sposób dzieci zaczynają uzasadniać swoje wybory, a to umiejętność niełatwa i przy każdej możliwej okazji powinniśmy ją ćwiczyć.



Co zrobić, gdy nie padnie właściwa odpowiedź? Możemy dać dodatkowy czas do namysłu lub podać wskazówkę. Nie warto przyspieszać. W ostateczności podajemy właściwe rozwiązanie i je tłumaczymy, zadając pytania naprowadzające na poprawne rozwiązanie. To nie jest stracony czas.

Dajmy czas na myślenie...

..., bo myślenie jest najważniejsze. Na co ważniejszego powinniśmy ten czas dawać na lekcjach? Myślenie to serce matematyki.

Nie żałujmy czasu na wyczekiwanie na właściwą odpowiedź. Cierpliwie czekajmy, aż problem wszyscy zrozumieją i zaproponują swoje rozwiązanie. Często gubimy te dzieci, które potrzebują czasu do zastanowienia, a przecież rozwiązywanie zadań matematycznych to nie wyścig na czas. Nikt nie dostanie dodatkowych punktów na egzaminie ani na konkursie, gdy pierwszy odda pracę. Liczy się poprawne rozwiązanie, metoda. Jednak często w praktyce szkolnej premiujemy się tych, którzy szybko skończą. Dajemy im do rozwiązania zadania domowe, pozwalamy czytać książki (nie o matematyce, niestety), mają po prostu poczekać i nie przeszkadzać innym. Czy to jest dla nich nagroda? O tym więcej w części poświęconej poziomowaniu pracy na lekcji.

Pracujmy w parach lub grupach jak najczęściej.

Wielu nauczycieli powtarza, że nie mają czasu na pracę w grupach, że przy tej pracy rozwiązuje się mało zadań w czasie lekcji, że niektórzy członkowie grupy nie pracują, polegają na pracy innych, zdolniejszych lub bardziej pracowitych uczniów. Nauczyciele czasem przyznają, że w trudnych klasach w ogóle nie wyobrażają sobie pracy grupowej i nawet tego nie próbują.

Tymczasem dobrze zorganizowana praca grupowa nie niesie takich zagrożeń lub je minimalizuje.

Zgadzam się, że łatwiej prowadzić lekcję, dając zadania indywidualne i rozwiązując kolejne przykłady przy tablicy, a do tego wybieramy najczęściej tych, którzy sami się zgłaszają, czyli ciągle te same osoby. Namawiam do tego, aby przynajmniej część lekcji prowadzić w inny sposób, korzystając z wzajemnego uczenia się uczniów w parach lub grupach.



Jak zacząć?

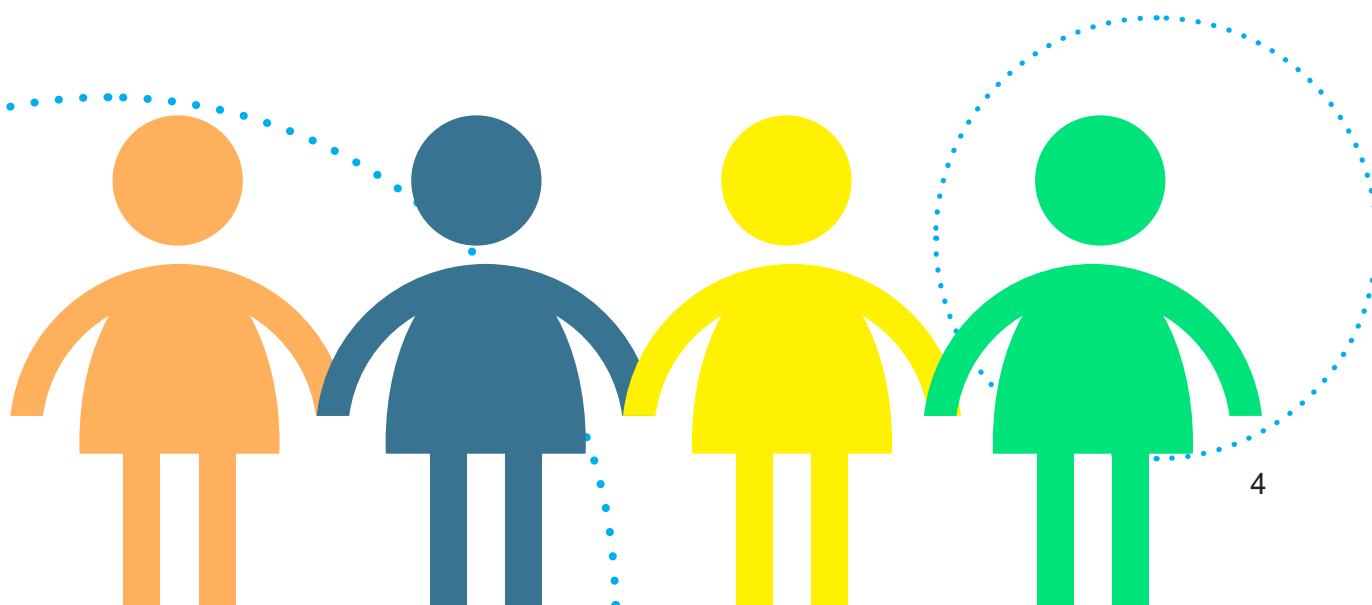
Łatwiej zacząć od pracy w parach lub grupach trzyosobowych niż od większych grup. Losujemy osoby do grup. W ten sposób unikamy dyskusji o tym, kogo sobie uczniowie życzą jako współtowarzyszy. Jeśli obawiamy się przypadkowych podziałów, to na początku naszej pracy tą metodą wyznaczamy, a nie losujemy pary lub grupy. Wtedy jednak może się zacząć dyskusja – Dlaczego mam być w tej grupie? Nie chcemy tej osoby w naszej grupie.

Jeżeli zamierzamy do omówienia zadań losować odpowiadających, to nie ma potrzeby wyznaczać ról w grupie (np. lider, prezenter, sekretarz). Każda osoba może być wylosowana i każda powinna umieć odpowiedzieć, korzystając z wcześniejszej wspólnej pracy grupy. Na początku pracy warsztatowej dzieci próbują rozwiązywać zadania osobno, ewentualnie konsultując wyniki. Nie jest to jeszcze współpraca, na której nam zależy, ale naszą rolą jest zachęcać do dyskusji i współpracy. Z czasem uczniowie przekonują się, że warto zadbać o zrozumienie każdego członka zespołu, bo każdy może być wylosowany do odpowiedzi. W interesie grupy jest wzajemne przekonywanie, uzasadnianie, tłumaczenie sobie nawzajem, a nawet ćwiczenie argumentacji. Każdy z członków grupy powinien mieć pełne notatki.

Jaka jest rola nauczyciela w pracy grupowej?

Powinien facylitować pracę zespołową, czyli być obok, towarzyszyć, zachęcać, mobilizować, a nie podpowiadać, oceniać, popędzać. To trudna rola, której dopiero się uczymy. To rola wymagająca od nauczyciela spokoju, cierpliwości i zaufania w możliwości dzieci. Bez tego zaufania dzieci nie nauczą się samodzielności i odwagi. Pamiętajmy, że także facylitując pracę zespołową, nadal jesteśmy odpowiedzialni za pracę uczniów na lekcji, zmienia się tylko forma. Często będziemy obserwować większe poruszenie, dyskusję, więc też będzie głośniejsze niż przy pracy innymi metodami. Nigdy nie powinniśmy obserwować chaosu czy braku pracy.

Jak więc pracować z grupami tak, aby angażowały się całe zespoły, a nie tylko jedna czy dwie osoby? Aby pracowały stale, a nie tylko wtedy, gdy nauczyciel podchodzi blisko? Aby wszyscy byli skupieni na szukaniu rozwiązań? Aby członkowie grupy umieli uzasadnić rozwiązanie?



Oto jeszcze kilka praktycznych wskazówek:

Wybermy zadania nietypowe, ciekawe dla uczniów. Stawiamy na pytania problemowe.

Dajmy tylko jedno zadanie zamiast zestawu. To pozwoli uczniom łatwiej skupić się na zadaniu. Unikniemy też podziałów typu: Jasiu wykona zadanie nr 1, Zosia nr 2, a Jacek nr 3. To koniec pracy zespołowej – de facto każdy wtedy pracuje indywidualnie.

Krążmy po klasie, dając wsparcie i budując poczucie bezpieczeństwa. Przyglądamy się, uśmiechamy, zachęcamy do wykonania rysunku, grafu itp., ewentualnie pytamy do czego już doszli. Nie podpowiadamy, nie potwierdzamy właściwych odpowiedzi ani nie zwracamy uwagi na błędne. To grupa powinna odkryć błąd w czasie pracy lub później przy podsumowaniu.

W przypadku trudnych zadań dobrze jest dać możliwość uzyskania wskazówki od nauczyciela (limitowana liczba, np. jedna na lekcję). Przy dobrze prowadzonej pracy grupowej uczniowie nie chcą korzystać ze wskazówki, sami chcą dojść do rozwiązania.

Jeżeli decydujemy się na pracę z podziałem ról w zespołach, rozwiązanie zadania przedstawia prezydent. Dopytujemy wtedy także innych członków grup o uzasadnienia poszczególnych części zadania.

Nauczyciel czeka na wyniki grup lub przerywa pracę wszystkim jednocześnie, aby podsumować zadanie. Warto zadać kilka pytań – nie tylko o końcowe rozwiązanie, ale także o częściowe wyniki lub fragmenty uzasadnienia. Za każdym razem zadajemy pytanie, dajemy czas na konsultację z grupą, losujemy kolejną osobę. Możemy także wylosować uczniów do zapisu na tablicy całości lub fragmentu zadania.

W klasie trudnej wychowawczo możemy na początku przeznaczyć krótki czas, np. 10 minut, na pracę w parach lub w trójkach. Jednak wiele obserwacji wskazuje, że tak zwane trudne klasy najlepiej pracują właśnie w zespołach. Często dlatego, że ich trudność polega na nieumiejętności skupienia w dużej klasowej grupie, czasem na niewystarczającej liczbie interakcji między uczniami. Jeżeli jednak mamy klasowych antagonistów, to przynajmniej na początku stosowania metody pracy zespołowej rozdzielmy ich do różnych grup.

Dyskutujmy na lekcjach matematyki

Dyskusja wydaje się być zarezerwowana dla przedmiotów humanistycznych. Tymczasem bez dyskusji, w której uczniowie przedstawiają argumenty za swoim rozwiązaniem, trudno mówić o autentycznej potrzebie uzasadniania. Gdy argumenty podają poszczególni uczniowie, reszta często jedynie przysłuchuje się propozycjom. Inaczej reagują uczniowie, gdy dyskusja jest naturalną konsekwencją porównania wyników pracy grupowej. W tym momencie oddajmy pole uczniom, nie przyspieszajmy rozstrzygnięcia poprzez nasze nauczycielskie podsumowanie. Zbyt szybkie podanie odpowiedzi zakończy dyskusję. Uczniowie podczas pracy nad zadaniem często pytają nauczyciela – a czy mamy dobrze? Warto uchylić się od odpowiedzi, dopytać czy są pewni wyniku, czy podzielają zdanie, czy wszyscy potrafią je uzasadnić. Po zakończeniu pracy nad zadaniem, już podczas prezentacji rozwiązań, pytać o uzasadnienie. Dopiero w toku dyskusji między grupami pada poprawna odpowiedź. Po niej zostaje potwierdzona przez nauczyciela. Często po wysłuchaniu poprawnej argumentacji jednej z grup, reszta przyznaje rację i wycofuje się ze swojego rozwiązania. To idealna dla nas sytuacja – uczniowie są zaangażowani, analizują argumenty, są zainteresowani wynikiem. Jeżeli poprawna argumentacja nie pada, możemy podać wskazówkę lub tylko dodatkowy czas na ponowne zastanowienie się nad zadaniem.

Pospieszne podanie odpowiedzi to niejedyna pułapka. Czuwanie nad tempem lekcji to kolejne wyzwanie stojące przed nami. Gdy damy za dużo czasu, uczniowie się zdekoncentrują, zaczną rozmawiać, gdy za mało – nie omówią uzasadnienia, nie wytłumaczą sobie nawzajem, może w ogóle nie rozwiążą zadania.

Nauczyciele czasem podpowiadają, czasem nawet zaczynając wymawiać oczekiwane przez siebie słowo. Unikajmy takich sytuacji, jeśli chcemy nauczyć dzieci samodzielnego myślenia. Często my, nauczyciele, ulegamy pokusie przyspieszenia procesu uczenia się i dajemy uczniom gotowe rozwiązania, przekazujemy im najlepsze, naszym zdaniem, procedury.

Tym samym pozbawiamy ich możliwości samodzielnego osiągnięcia sukcesu i radości z pokonania problemu (Sterna 2014: 92). „Często my, nauczyciele, ulegamy pokusie przyspieszenia procesu uczenia się i dajemy uczniom gotowe rozwiązania i przekazujemy im, najlepsze naszym zdaniem, procedury. Tym samym pozbawiamy ich możliwości samodzielnego osiągnięcia sukcesu i radości z pokonania problemu.” (Sterna 2014, s 92).

Co jest potrzebne, aby dzieci zechciały dyskutować?

Przede wszystkim należy stworzyć dobrą atmosferę, bezpieczną i miłą. To niełatwe, ale pamiętajmy, że w stresie trudno o śmiałe, twórcze rozwiązania czy uczenie się. Ważne, aby nikt nie obawiał się błędnej odpowiedzi. Błąd jest zwykłą sprawą przy poszukiwaniach, unikanie błęd może prowadzić do niezgłaszania odpowiedzi. Warto na lekcjach pełnych dyskusji, rozwiązywania problemów, w ogóle zrezygnować z oceniania w jakikolwiek sposób. Nie tylko z ocen, ale także z plusów czy kropek na biedronce. Takie lekcje to jeszcze nie czas na podsumowania, to czas nauki i twórczych poszukiwań. Radości ze znajdowania rozwiązań. Razem z dziećmi się nimi cieszymy.

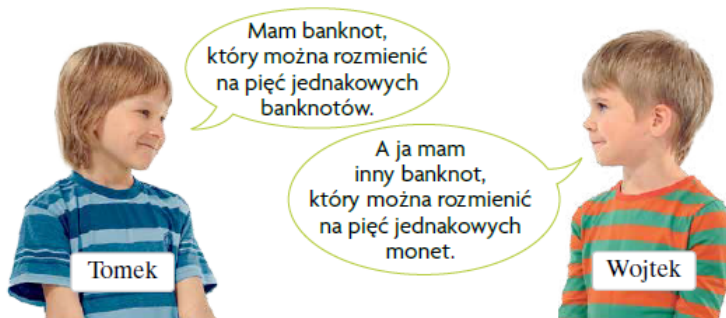
Ważny jest dobór zadań. To powinny być problemy, zadania o nieoczywistych wynikach. Zadania o nadmiarze danych, wymagające selekcji informacji. Nie obawiamy się, że dzieci nie rozwiążą tych zadań, że będą dla nich za trudne. Przecież mają nas obok, zawsze możemy dać wskazówkę. W zespołach dzieci czują się bezpieczniej i szybciej znajdują rozwiązania nawet trudnych zadań, a zapewnianie sytuacji, w których dzieci nabywają kompetencje społeczne, takie jak komunikacja i współpraca w grupie jest też naszym nauczycielskim obowiązkiem. Dzieci nawiązują relacje nie tylko na przerwach czy wycieczkach – relacje powinny być budowane przez większość czasu przebywania w szkole. Jeżeli uczniowie najczęściej pracują indywidualnie, to nie dziwnym jest, że tak intensywnie spędzają przerwy i tak na nie czekają. Gdy w szkole większość nauczycieli stale stosuje pracę zespołową, to w zauważalny sposób dzieci spędzają przerwy spokojniej i bezpieczniej.

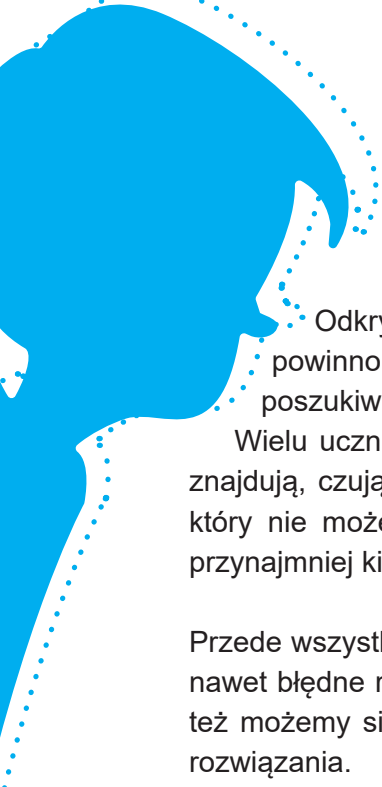
Wzajemne uczenie się w parach i zespołach następuje m.in. poprzez tłumaczenie sobie pomysłów, uzasadnianie rozwiązań. Aby to nastąpiło, dziecko musi najpierw uświadomić sobie drogę do wyniku i przedstawić go drugiej osobie. Takie uświadomienie być może nie nastąpiłoby, gdyby nie współpraca z kolegami w zespole.

Bardzo często dzieci podają różne strategie rozwiązania zadań. Dajmy czas na ich przedstawienie. To bardzo pouczający, cenny moment, gdy mają okazję skonfrontować różne sposoby myślenia.

Do dyskusji dobrze sprawdzają się także zadania o wielu rozwiązaniach. Warto zadbać o to, aby takie zadania stały się doświadczeniem uczniów. Myślenie dywergencyjne przy poszukiwaniu więcej niż jednego rozwiązania jest rzadziej kształcone niż myślenie typowe, konwergencyjne w zadaniach o jednym rozwiązaniu. Znalezienie takich przykładów nie powinno być trudne, chociaż występuje zdecydowanie rzadziej niż zadania o jednym rozwiązaniu. Jednak nastawienie na wyłącznie jeden wynik jest czasem po prostu błędne.

6. O jakich banknotach mówią dzieci? Czy jest tylko jedno rozwiązanie?





Odkrywanie matematyki zamiast podawania schematów, wzorów do powielenia powinno być praktyką szkolną. Liczne badania wskazują jednak, że samodzielne poszukiwanie rozwiązań przy nietypowych zadaniach nie jest powszechną praktyką.

Wielu uczniów próbuje zastosować jakiś już znany sposób na rozwiązanie. Gdy go nie znajdują, czują się bezradni i nie rozwiązują zadania lub brną w znany sobie już schemat, który nie może być zastosowany. Na to, aby uniknąć takiego powielania rozwiązań jest przynajmniej kilka sposobów.

Przede wszystkim uczmy odwagi myślenia. Odwaga wynika z poczucia pewności, że żadne, nawet błędne rozwiązanie nie zostanie skrytykowane. Błędy są częścią uczenia się, na nich też możemy się uczyć. Żadne dziecko nie powinno obawiać się podania swojej propozycji rozwiązania.

Ważne, aby uczniowie odczuwali satysfakcję ze swoich rozwiązań. Jeśli nie damy czasu na omówienie wszystkich propozycji, stracimy nie tylko możliwość dyskusji i analizy rozwiązań, możemy stracić też entuzjazm dzieci do poszukiwań. Pamiętajmy, aby docenić dobre rozwiązanie, cieszyć się razem z dziećmi. Ocena w tym momencie może nie być dodatkową mobilizacją, wręcz przeciwnie, motywacja zewnętrzna zajmie miejsce motywacji wewnętrznej (Żylińska 2013: 268).

Wzmacniamy poczucie zaradności matematycznej zamiast poczucia bieżności stosowania schematów. Tu pomocne są wszelkie zadania poza schematem, niekoniecznie trudne, ale wymagające myślenia. Znakomite są serie zadań, dzięki którym na kolejnych analogicznych przykładach dzieci mają okazję do odkrycia sposobu, struktury. Zachęcajmy do obserwacji i dzielenia się pomysłami.

Wprowadzajmy nowe treści na zasadzie problemowej, a nie kolejnego sposobu na rozwiązywanie zadań. Zanim zaczniemy ćwiczyć kolejne przykłady postawmy problem, w którym dzieci mają szansę na samodzielne odkrycie. Konstruktywistyczne podejście do nauczania zakłada, że będziemy uczyć bez uczenia na pamięć. Mechaniczne zapamiętanie blokuje możliwość późniejszego zrozumienia (Semadeni 2016: 19).

Jeśli nawet wiedza powinna być opanowana pamięciowo (np. wzory na pola), to najpierw zadbajmy o zrozumienie sposobu wyprowadzania tych wzorów. Wydaje się to logiczne i zrozumiałe, ale często – w imię realizacji podstawy programowej – wolimy przyspieszyć, zaoszczędzić czas na wyprowadzanie czy choćby omówienie wzorów, rozwiązać więcej przykładów... nasi uczniowie może wykonali więcej zadań, ale to nie znaczy, że więcej zrozumieli czy zapamiętali.

Uczmy graficznych rozwiązań, rysowania, stosujmy grafy i pomocnicze rysunki. Dzieci, które rysują w wielu zadaniach częściej rozwiązują je poprawnie niż pozostali uczniowie (Dąbrowski 2006: 97,132).

Pamiętajmy też, że nawet wydawałoby się jakiś niezwiązany z zadaniem rysunek może pomóc dziecku w drodze do rozwiązania. Palce, poruszanie palcami, rysowanie, a nawet bazgranie uruchamiają myślenie, mogą pomóc naszym uczniom.

Kilka przykładów nieskutecznych, a czasem i szkodliwych praktyk. Kontraproduktywne są wszelkie ćwiczenia po wielokroć tych samych przykładów, rozwiązywanie ciągle tego samego, aby wyćwiczyć. Nawet jeśli uczniowie już opanowali jakąś umiejętność, to ćwiczymy dalej, bo „zostały jeszcze niewypełnione strony w ćwiczeniach” albo „to im nie zaszkodzi”. Czasem szkodzi i powoduje, że dzieci przestają lubić matematykę, bo jawi im się jako ciąg nudnych, powtarzających się zadań.

W podobnym stylu stosuje się wyścigi na czas typu kto pierwszy rozwiąże. Do czego ma służyć ta szybkość? Limity czasowe są stosowane na egzaminach i konkursach, ale za oddanie pracy przed czasem nie ma żadnej dodatkowej punktacji.

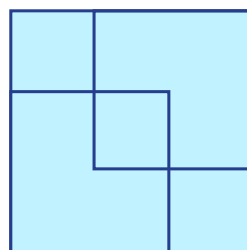
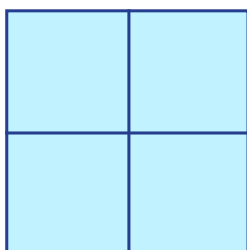
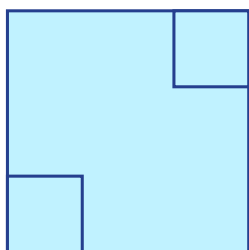
Wstrzegajmy się też zbytniego formalizmu. Odpowiedzi mogą być różne, punktowany powinien być pomysł i poprawna metoda, a nie jedynie formalny zapis. Uczniowskie, rysunkowe, opisowe, schematyczne i jeszcze inne dziecięce rozwiązania powinny być przez nas traktowane na równi z zapisami formalnie matematycznymi, o ile metoda jest poprawna.

Odwaga, radość, satysfakcja będą nam towarzyszyć wtedy, gdy zadania będą ciekawe, odpowiedzi nieoczywiste, czyli problemy nie będą za proste. To, co łatwe i typowe, nie przyciągnie uwagi uczniów. Nie bójmy się proponować takich problemów. Uzbrójmy się w cierpliwość i spokój, przygotujmy ewentualne wskazówki, połączmy dzieci w pary lub zespoły, a efekty przyjdą. Należy nastawić się, że pewnie rozwiążemy mniej zadań, ale za to samodzielnie i trudniejsze. Wymaga to przemyślenia i przygotowania, może na początku zaczynając nie od całych lekcji, ale od ich fragmentów.

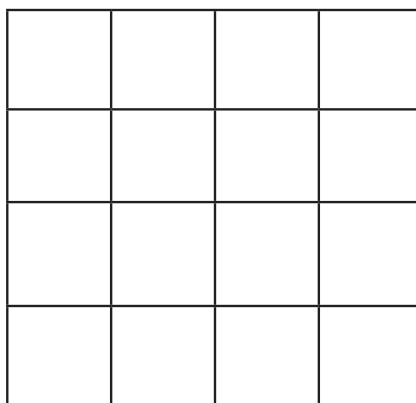
Nie tylko my odpowiadamy na pytania uczniów, a raczej należałoby powiedzieć: bardzo rzadko odpowiadamy. Wprowadźmy zasadę pytania najpierw innych uczniów, a dopiero na końcu nauczyciela. Nauczyciel powinien dać wskazówkę, w ostateczności poprawną odpowiedź i znowu zapytać uczniów o wyjaśnienie.

Nie tylko my zadajemy pytania. To jedna z kolejnych ważnych zasad. Oby nie było tak, jak stwierdził Lew Wygotski: „Na lekcjach odpowiada się na pytania, których uczniowie sobie nigdy nie postawili” (Dylak 2013: 10). Poza pytaniami pojawiającymi się w trakcie lekcji i dotyczącymi danego problemu zachęcajmy dzieci do tworzenia własnych pytań, zagadek, kolejnego przykładu, niejako dalszego ciągu. Na uczenie się ogromny wpływ ma głębokie przetwarzanie i tworzenie (Żylińska 2013: 44). Głębokie przetwarzanie występuje w problemowych zadaniach, w dyskusji, w przedstawianiu zadania za pomocą rysunków, a tworzenie to kolejne pytania, podobnie jak w zadaniu z klasy 2 (Ludwa 2015b: 76):

4. Ile kwadratów jest na każdym rysunku?



W propozycjach uczniowskich zadań często pojawia się taki przykład:



To świetne zadanie wymagające nie tylko myślenia i spostrzegawczości, ale także uporządkowania myślenia, jego organizacji. Często trudno odpowiedzieć ile jest na rysunku kwadratów, czy na pewno żadnego nie pominęliśmy ani nie policzyliśmy podwójnie. Zaczniemy liczenie od najmniejszych o boku 1, dalej dzieci już dopisują liczby większych kwadratów. Okazuje się, że kwadratów jest 30. Zadanie polecam dla młodszych uczniów (do klasy 5), ale nawet uczniowie klas 8 będą się nad nim zastanawiać. Jest możliwe do zastosowania już od najmłodszych klas, w momencie, gdy dzieci potrafią odróżnić kwadrat od innych prostokątów, czyli zwykle w klasie 2 lub 3.

Taka propozycja zadania nie tylko daje satysfakcję autorowi zadania (choć zazwyczaj sam nie zna poprawnej odpowiedzi), ale także wzbudza zainteresowanie całej klasy i żywą dyskusję.

Przykłady zadań o sześciacie do wykorzystania w pracy zespołowej w klasach 4-8:

1. Do tego zadania potrzebne nam jest pojęcie sześciatu i jego siatki. Zadanie możemy wykorzystać już w czwartej klasie, ale nawet licealiści zaangażują się w jego rozwiązanie.

Zadanie:

Narysuj wszystkie różne siatki sześciatu.

Rozwiązanie:

Siatek jest 11. Narysowanie wszystkich wymaga czasu i wyobraźni przestrzennej.

2. Wreszcie ciekawe zadanie obecne od lat na konkursach matematycznych. Możemy je zaproponować uczniom znającym tw. Pitagorasa, chociaż rozwiązanie graficzne nie wymaga znajomości tego twierdzenia.

Zadanie:

Jaka jest najkrótsza droga mrówki między najbardziej oddalonymi wierzchołkami sześciatu?

Tym razem przeanalizujemy różne pojawiające się rozwiązania, w tym nieprawidłowe.

Warto rozważyć wszystkie hipotezy i doprowadzić do wspólnej dyskusji o rozwiązaniach. Zapis obejmuje wtedy obliczenia do wszystkich hipotez.

1. Droga prowadzi przez trzy krawędzie $L_1=1+1+1=3$.



2. Mrówka przechodzi przez przekątną ściany, dalej po krawędzi długości 1. Z tw Pitagorasa długość przekątnej kwadratu $\sqrt{2}$, więc cała droga wynosi $L_2= 1+ \sqrt{2}$.



3. Mrówka przechodzi do połowy krawędzi, dalej do najdalszego wierzchołka. Z tw Pitagorasa obliczamy połowę tej drogi.

$$1^2 + (\frac{1}{2})^2 = x^2$$

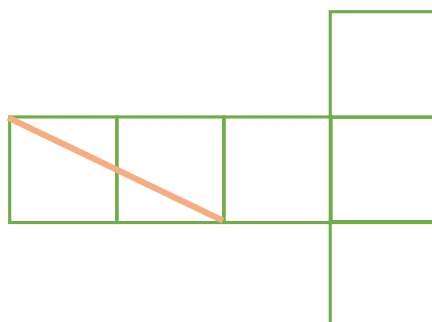
$$x = 0,5 \sqrt{5}$$

$$L_3=2x$$

$$L_3=\sqrt{5}$$



Najkrótszą drogą między dwoma punktami jest oczywiście rozwiązanie 3, czyli odcinek na siatce sześcianu dł. $\sqrt{5}$. To rozwiewa wątpliwości czy podane rozwiązanie jest szukaną najkrótszą drogą. Uczniowie na tym etapie często doświadczają olśnienia, efektu wow – jakie to proste.



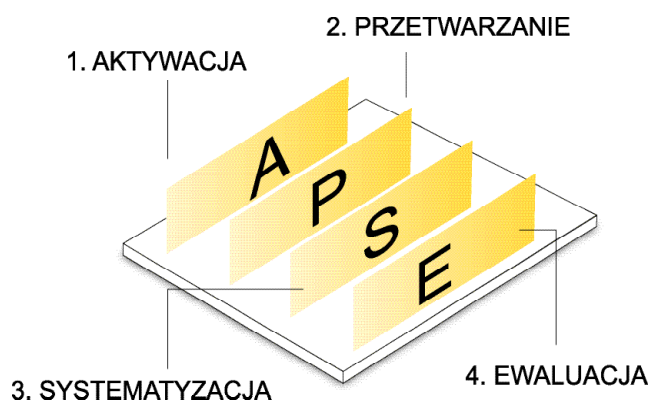
Jeśli damy okazję do dyskusji, uczniowie sami wskażą poprawne rozwiązanie. Jeśli nie zostanie ono zgłoszone, prosimy wszystkich o narysowanie siatki sześcianu i wskazanie najbardziej oddalonych wierzchołków. Rozwiązanie podawane jest wtedy błyskawicznie przez wielu uczniów.



Metoda grup eksperckich (jigsaw) przyda nam się przy wprowadzaniu nowego materiału (Marzano 2012: 52), np. podziału równań na oznaczone, tożsamościowe i sprzeczne. Uczniowie w grupie eksperckiej otrzymują pisemną informację, np. o równaniach oznaczonych (w innych grupach o sprzecznych lub nieoznaczonych). Eksperci rozmawiają na ten temat, rozwiązują zadania i wyjaśniają w swoim zespole ewentualne wątpliwości. Następnie uczniowie zmieniają grupy tak, aby w każdej nowej grupie znajdował się ekspert każdej dziedziny, czyli w tym przypadku ekspert równań oznaczonych, ekspert równań tożsamościowych, ekspert równań sprzecznych. Zadaniem każdego z ekspertów jest wyjaśnienie kolegom swojego rodzaju równania i wspólne rozwiązywanie zadań. Zaletą tej metody jest konieczność tłumaczenia swojej części przez każdego z uczniów. Powoduje to lepsze zrozumienie poznanego materiału. Nie bez znaczenia jest też fakt, że tłumaczą i wyjaśniają ci uczniowie, którzy rzadko występują w roli ekspertów.



Metoda lekcji odwróconej to metoda pozwalająca przenieść podstawowy poziom nowego zagadnienia do pracy domowej zorganizowanej z użyciem IT. Przygotowujemy krótki (najlepiej 3-7 minut) film pokazujący dane zagadnienie w prosty sposób. Film powinien być dla dzieci jasny i ciekawy. Mogą go obejrzeć raz lub kilkakrotnie, w zależności od indywidualnych potrzeb. Następnie, nadal w domu, odpowiadają na pytania lub rozwiązują proste zadania związane z filmem. Zadaniem tej części pracy ucznia jest zapoznanie z nową wiedzą lub umiejętnościami na podstawowym poziomie. Powinna nastąpić aktywizacja i przetwarzanie wiedzy i umiejętności. Natomiast na lekcji jest czas na systematyzację i ewaluację. Te cztery etapy, wyszczególnione i opisane przez prof. Stanisława Dylaka, składają się na Strategię Kształcenia Wyprzedzającego (Dylak 2013), nazywanego częściej odwróconym nauczaniem.



Jedną z zalet stosowania tej metody jest przeniesienie pierwszej, najbardziej podstawowej dawki wiedzy, wprowadzenia w nowe zagadnienie poza czas lekcyjny. Dzięki temu uczeń samodzielnie zapoznaje się z tematem, przygotowuje ewentualne pytania i wątpliwości na lekcję. W czasie lekcji można już pracować z konkretnymi problemami zgłoszonymi przez uczniów i pogłębiać rozumienie danego zagadnienia. Nauczyciele stosujący tę metodę podkreślają, że więcej mogą zrobić z uczniami na lekcjach, udaje się zrealizować bardziej zaawansowane treści niż przy stosowaniu tradycyjnych metod.

Nie do przecenienia jest też aspekt wychowawczy. Jak podkreślają badacze zajmujący się cyberprzemocą i uzależnieniami od internetu, dzieci i młodzież powinni się uczyć korzystania we właściwy sposób z zasobów sieci zamiast całkowicie z niego rezygnować (Pyżalski 2017: 159). Sprzyja temu podawanie przez nauczyciela konkretnej ścieżki dotarcia do materiału w internecie lub wręcz podanie odpowiedniego linku drogą mailową (np. przez dziennik elektroniczny).

Stosując tę metodę zmieniamy nie tylko organizację pracy, zmieniamy funkcjonowanie i ucznia, i nauczyciela. To, co najłatwiejsze powinno być przyswojone w domu. Na początku lekcji, po obejrzeniu przez ucznia materiału online w domu i odpowiedziach na pytania/zadania, nauczyciel wyjaśnia ewentualne niejasności lub w inny sposób organizuje pracę tak, aby mogły być rozwiązane wątpliwości, np. przy rozwiązaniu w klasie problemu nawiązującego do wcześniej oglądanego filmu. Zajęcia klasowe dobrze jest prowadzić w parach lub grupach. Powinno dojść do uporządkowania wiedzy i umiejętności, do pogłębienia zrozumienia problemu. Można zaplanować dyskusję, pracę grupową czy dowolną aktywność związaną z poruszonym na filmie zagadnieniem. Można też na lekcji poprowadzić pracę na różnych poziomach zaawansowania – lekcję rotacyjną (Polak 2014), o czym za chwilę.

W krytyce tej metody często pojawiają się dwa głosy:

1. Co zrobić, gdy większość uczniów nie obejrzy w domu filmu?

To rzeczywiście się zdarza, zwłaszcza na początku pracy tą metodą. Skuteczne jest wtedy podzielenie klasy na zespoły tak, aby w każdym znalazła się osoba przygotowana do lekcji – ekspert. Ekspert tłumaczy pozostałym treści ujęte w filmie. Ponieważ uczniowie chcą zostać ekspertami na kolejnych lekcjach, zwykle są do nich przygotowani.

Natomiast nieskuteczne jest puszczenie filmu do obejrzenia w domu podczas lekcji. Uczniowie uczą się wtedy, że nie warto poświęcać czasu na oglądanie zadanego filmu. Ryzykujemy, że na kolejne lekcje jeszcze mniej uczniów go obejrzy.

Tu warto dać szansę tym, którzy być może jeszcze nie mają w domu dostępu do internetu. Wskażmy miejsce w szkole, np. w sali po lekcjach, w świetlicy – gdzie mogą obejrzeć film.

2. Gdy wszyscy nauczyciele zaczną zadawać filmy na swoje lekcje, to dziecko godzinami będzie ślęczeć przed komputerem.

Nawet w szkołach, gdzie permanentnie stosuje się nauczanie odwrócone (np. ESSA Academy w Bolton pod Manchesterem), obejrzenie kilku filmów nie trwa godzinami. Oczywiście zawsze, także i w tym przypadku, należy zadbać o sensowność zadań domowych. Nie na każdą lekcję będziemy przecież oczekiwać oglądania filmu. To jedna z metod przez nas stosowanych, nie jedyna. W przypadku nadmiaru zadawania filmów przez różnych nauczycieli można sporządzić grafik zadawanych zadań tak, aby nie kumulowały się w tym samym dniu (np. matematyk zadaje w poniedziałki i środy, a nie każdego dnia, w którym ma lekcje). Grafik proponuje wychowawca na podstawie planu lekcji swojej klasy. Taka praktyka jest już stosowana w niektórych szkołach i dotyczy wszelkiego rodzaju zadań domowych, nie tylko z użyciem IT.

Metoda lekcji odwróconej może przenieść pracę w klasie na zupełnie inny poziom – przy rezygnacji z prostych tłumaczeń, z wprowadzenia, z dyrektywnych instrukcji na podstawowym poziomie, co następuje w domu, możemy pogłębić rozumienie tematu, odnieść się do wielu kontekstów, rozwiązać zadania o podwyższonym stopniu trudności czy zwyczajnie więcej przećwiczyć i utrwalić niż przy tradycyjnie prowadzonej lekcji. Jednak rola nauczyciela i ucznia ulega poważnej zmianie. Nie jest to tylko zmiana zadania domowego polegającego na obejrzeniu filmu zamiast rozwiązywania kolejnych zadań z podręcznika. Zmienia się filozofia uczenia. Zmienia się rola nauczyciela – przestaje być kierownikiem, a staje się tłumaczem, moderatorem. Nie tyle naucza, co wspomaga w uczeniu, nie tyle wyklada temat, co wyjaśnia i tłumaczy. Zmienia się także rola ucznia – z biernego odbiorcy staje się aktywnym twórcą – konstruktorem własnej wiedzy. W końcu zmienia się też sama lekcja – przestaje być jednostką, na której uczeń zostaje zapoznany z nowym materiałem. Celem lekcji staje się ugruntowanie wiadomości, korekta rozumienia, doskonalenie określonych umiejętności czy wreszcie rozwiązanie ewentualnych problemów. W dużym stopniu zmienia się również środowisko – z klasowo-lekcyjnego na internetowe, znacznie bogatsze i intelektualnie bardziej wymagające (Dylak 2013: 11).



Praca na różnych poziomach zaawansowania powinna zacząć się od np. prostego testu (bez ocen) lub wspólnego rozwiązania zadania na średnim poziomie lub innego działania, które ułatwi uczniowi odpowiedź na pytanie: „Na jakim poziomie zaawansowania chcę dziś pracować?”. Następnie dzieci zgłaszają się do pracy na poziomie podstawowym, średnim lub trudnym (poziomów może być więcej, mogą też być tylko dwa). Wybór należy do ucznia, nauczyciel tylko pyta o ich decyzje i dzieli klasę na dwójki i trójki (mogą być większe grupy, proponuję nie większe niż 5 osobowe). Uczniowie przystępują do pracy na wybranym poziomie, biorąc jedno zadanie. Po rozwiązaniu samodzielnie sprawdzają wynik. Kolejne zadanie mogą wybrać z tego samego poziomu lub zmienić poziom na wyższy czy niższy. Tempo i wybór zadań należą do ucznia. W lekcji rotacyjnej często stosowane są stanowiska komputerowe z testami online (Polak 2014), i bez tego stanowiska praca jest dla uczniów wyjątkowo atrakcyjna.

W metodzie bazujemy na wewnętrznej motywacji. Przy wyborze poziomu uczeń bierze odpowiedzialność – nie dostał za łatwego, nudnego zadania ani też za trudnego. Dokonanie wyboru zobowiązuje, przy tej metodzie uczniowie rzadko proszą nauczyciela o pomoc czy wskazówkę. Traktują rozwiązanie zadania jak punkt honoru, angażują się i bardzo chcą rozwiązać je samodzielnie. Ważne jest własne tempo pary czy trójki uczniów. Jeśli rozwiążą przykład poprawnie, chętnie sięgają po trudniejsze zadanie. Niejednokrotnie zaczynają od zadań podstawowych i dochodzą do najtrudniejszych. Zdarzają się oczywiście błędy, ale po sprawdzeniu wyników sami poszukują pomyłki w swoim rozumowaniu. Uczniowie lubią pracować tą metodą, daje im poczucie bezpieczeństwa i dużą samodzielność.

KILKA WSKAZÓWEK DOROWADZENIA LEKCJI ROACYJNEJ:

1. Zadania powinny dotyczyć jednego tematu lub działu.
2. Liczba rozwiązyanych zadań może być dowolna, limitujemy tylko czas.
 - a. Można też limitować liczbę zadań. Dajemy wtedy zestaw (np. po 3 zadania na poziomie podstawowym, średnim i trudnym). Jeżeli decydujemy się na zestaw, dokończenie zadań jest pracą domową.
3. Uczniowie w każdej chwili mogą zmienić poziom trudności (przy zestawach zadań obowiązkowa pozostaje liczba rozwiązanych zadań, np. wszyscy rozwiązują 3 zadania).
4. Uczniowie mogą zmienić także grupę (np. dołączyć do grupy pracującej na niższym poziomie).
5. Nauczyciel wspiera uczniów, facylituje pracę zespołową. Wspomaga wskazówkami lub tłumaczeniem tylko wtedy, gdy jest taka potrzeba.
6. Na taką pracę można przeznaczyć tylko część, niekoniecznie całą lekcję.
7. Tak zorganizowana lekcja świetnie sprawdza się przy powtórzeniach. Może być stosowana także przy nowym zagadnieniu, wtedy ważne jest wspólne rozwiązanie jednego lub dwóch zadań na średnim poziomie zanim nastąpi podział na grupy czy pary.
8. Ponieważ bazujemy na motywacji wewnętrznej, nie dajemy ocen, plusów ani minusów.
9. Przygotowanie lekcji, przemyślenie poziomów zadań jest podstawowym wyzwaniem dla nauczyciela. Samo prowadzenie lekcji zazwyczaj jest ograniczone do nadzorowania zapisu w zeszytach (niektórzy mają tendencję do jedynie wymyślania rozwiązań, bez stosowania zapisów).
10. Uważajmy na poziom zaangażowania i motywacji dzieci – często jest na tyle wysoki, że trzeba zmienić metodę, aby za bardzo nie zmęczyć uczniów.

Do indywidualizacji pracy, poza lekcją rotacyjną, warto stosować skrzynkę z dodatkowymi zadaniami. Przy lekcji poprowadzonej frontalnie, gdy zależy nam na przećwiczeniu pewnego zestawu zadań przez wszystkich, można zaproponować specjalne zadanie po zakończeniu zestawu. Zadanie możemy po prostu zapisać na tablicy, zaznaczając, że to dla tych, którzy już przeliczą zadany zestaw. Możemy posłużyć się pewnym atrakcyjnym rekwizytem – skrzynką ze skarbem, czyli zadaniami specjalnymi. Im ciekawiej będzie wyglądać, tym chętniej zainteresują się nią uczniowie. Na zdjęciu poniżej zaprezentowana jest skrzynka z możliwością poziomowania zadań.



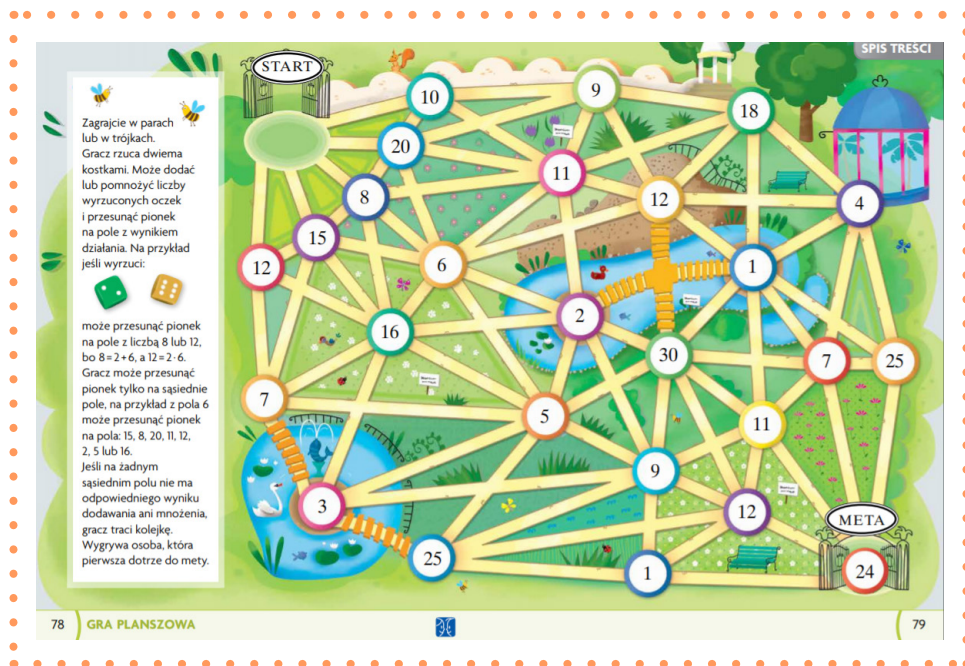
Gry na lekcjach matematyki, a jeszcze lepiej obecne także na przerwach i w świetlicy.

Wszyscy lub prawie wszyscy lubimy gry i widzimy wiele korzyści ze stosowania ich na lekcjach matematyki. Możemy wykorzystywać gry dydaktyczne, przeznaczone do nauki matematyki. Warto sięgnąć również po gry logiczne, także planszowe.

- Gry, które warto stosować powinny wymagać myślenia. Czasem spotykamy gry dydaktyczne, których celem jest wyłącznie wyćwiczenie jakiejś umiejętności, zazwyczaj rachunkowej.
- Czasem warto sięgnąć i po takie, jednak pamiętajmy, że ich przydatność jest ograniczona.
- Dzieci nauczą się więcej, próbując rozważać różne rozwiązania i budować swoje strategie.

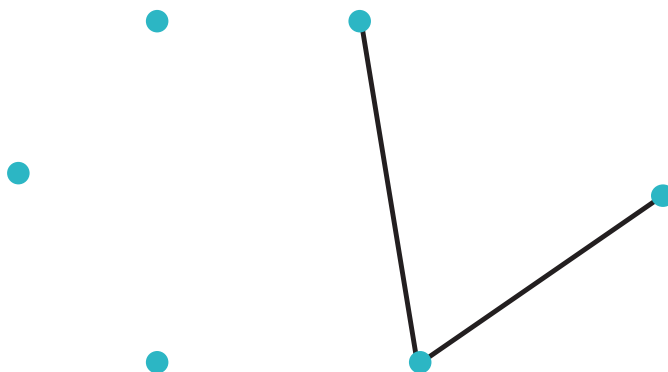
O korzyściach ze stosowania gier wiele pisze twórca i ich propagator, dr Mirosław Dąbrowski. Podkreśla skuteczność uczenia się matematyki poprzez budowanie, testowanie, ulepszanie strategii dzięki aktywności, rosnącej wierze w swoje siły i możliwości oraz rosnącej motywacji do uczenia się w ogóle (Dąbrowski 2015).

Przykładem gry dydaktycznej, w której nie wystarczy tylko rachować jest gra zamieszczona w podręczniku do klasy 2 (Ludwa 2015a: 78). Aby dojść do mety, dziecko rozważa, na których polach warto postawić pionek. Po takiej rozgrywce przeprowadzamy dyskusję, na które pola najtrudniej było się dostać, a na które najłatwiej. To już nie tylko liczenie, to analizowanie możliwości powiązane z dodawaniem i mnożeniem, a także z prawdopodobieństwem wyrzucenia odpowiedniej liczby oczek.



Kolejną grą jest **Sześć Kropiek**. Wymaga przewidywania ruchów, jest dla dwóch osób, zaczyna się od narysowania sześciu kropek. Pierwszy gracz łączy odcinkiem dowolne dwie kropki. Drugi rysuje inny odcinek łączący dwie kropki, i tak na zmianę, aż do chwili, gdy powstanie trójkąt o wierzchołkach w trzech spośród pierwotnie narysowanych sześciu kropek. Gracz, który narysuje taki trójkąt przegrywa. Wbrew pozorom gra o łatwych zasadach wcale łatwa do wygrania nie jest.

Poniżej stan gry po pierwszych dwóch ruchach (każdy z graczy narysował jeden odcinek). W tym momencie nie można już narysować odcinka między dwoma punktami na końcu narysowanych odcinków.



Na lekcjach matematyki możemy wykorzystać **gry planszowe**: Abalone, Digit, Blokus, Oshello, Robale. Mogą w nie grać już siedmiolatki. Co więcej, ich szanse na wygranie wcale nie są mniejsze niż starszych dzieci, a nawet dorosłych. To ciekawe i wciągające gry, które możemy proponować także na przerwach czy zajęciach świetlicowych.



Abalone

Dwaj uczestnicy przesuwając kule, starają się zepchnąć kule przeciwnika poza planszę. Gra wymaga zauważania dynamicznie zmieniających się zagrożeń, planowania swoich ruchów i przewidywania posunięć przeciwnika. Jest niezwykle angażująca. Na jedną rozgrywkę należy przeznaczyć przynajmniej 20 minut. Czas można skrócić do np. 10 minut – wygrywa ten z graczy, który stracił więcej kulek przeciwnika.

Blokus

Gra planszowa dla 2-4 osób. Gracz układa kolejne płytki na planszy, starając się pozbyć wszystkich i jednocześnie zablokować możliwości dokładania płytek przez innych graczy. Gra wymaga planowania i wykorzystywania nowych możliwości. Rozgrywka trwa przynajmniej 20 minut. Można skrócić rozgrywkę do np. 10 minut – wygrywa ten gracz, który ma najmniej jednostkowych płytek.

Digit

Gra dla 2-4 osób. Gracze układają z patyczków zadane figury, mając możliwość przesunięcia tylko jednego patyczka. Digit rozwija wyobraźnię geometryczną, wymaga także planowania kolejnych posunięć. Warto ustalić z góry czas gry (np. 15 minut) i zliczyć karty. Wygrywa ten z graczy, który ma najmniej kart.

Digit oraz Blokus zasługują na szczególną uwagę – dają wiele okazji do manipulowania figurami. To rzadkie przykłady gier pomagających w uczeniu się geometrii.

Oshello

W grze uczestniczą dwie osoby. Wymaga użycia strategii i trwa ok. 15 minut. Ponieważ szala zwycięstwa może się przechylać do ostatnich minut gry, rozgrywkę warto doprowadzić do końca, to jest do wykorzystania wszystkich pionków lub do zablokowania planszy.

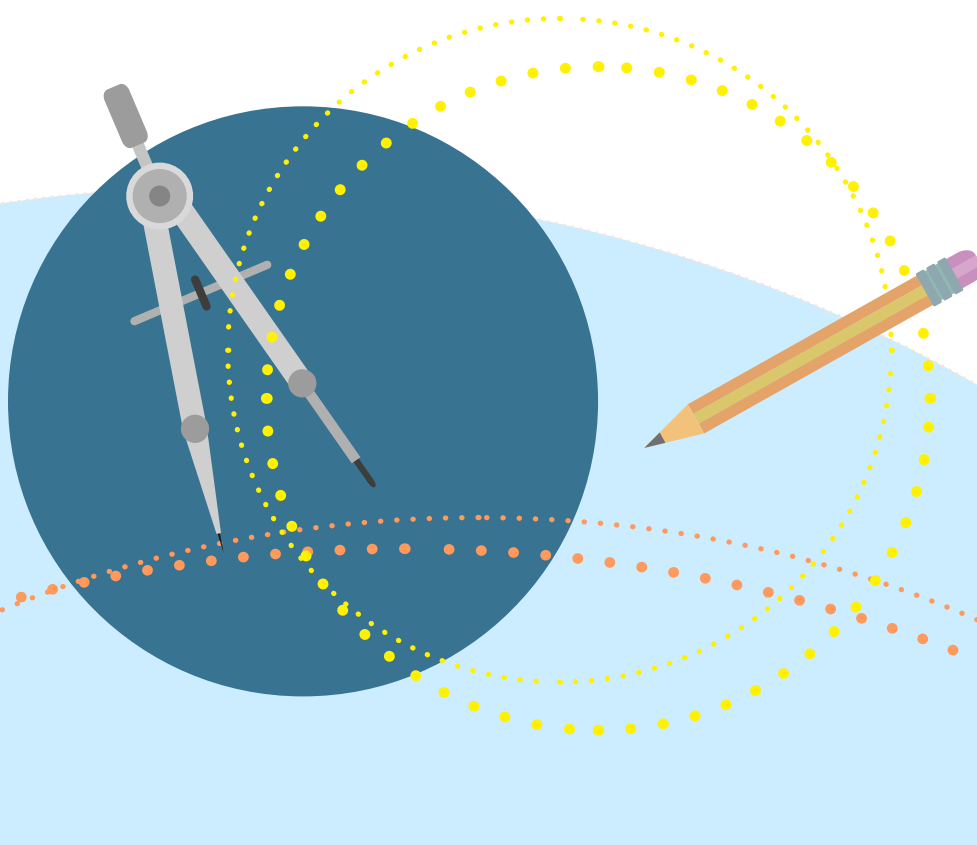
Robale

Mimo niesympatycznej nazwy to bardzo sympatyczna gra! Rzucając kilkoma kostkami, gracze przewidują kolejne rzuty już mniejszą liczbą kostek. Podejmują decyzję o zakończeniu swojego ruchu w dowolnym momencie – mogą ryzykować i wykonywać kolejne rzuty kostką lub wycofać się. Oceniają prawdopodobieństwo korzystnego dla siebie wyniku rzutu kostkami, oczywiście bez nazywania i obliczania prawdopodobieństwa.

W powyższych grach, chociaż nie kojarzą nam się z typowymi lekcjami matematyki, uczniowie wielokrotnie ćwiczą treści z Podstawy Programowej, np. dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii. Lekcje muszą jednak być odpowiednio przygotowane. Na przykład każdorazowo to nauczyciel wyjaśnia zasady. Czytanie instrukcji gry zajmuje dużo czasu i jest dla dzieci trudne i nudne (Zambrowska 2018). Przykłady wykorzystania gier na lekcjach oraz praktyczne wskazówki ich wprowadzania i omawiania strategii po zakończonej grze znajdziemy w pracach Małgorzaty Zambrowskiej.

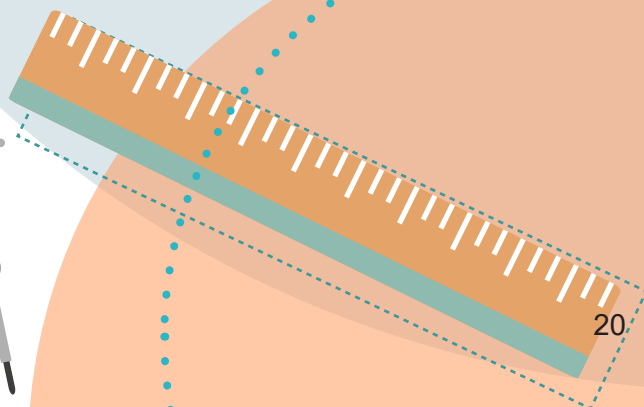
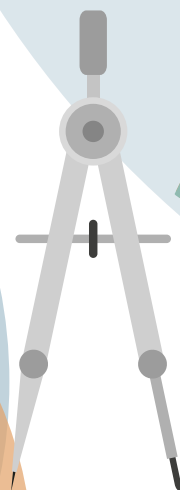
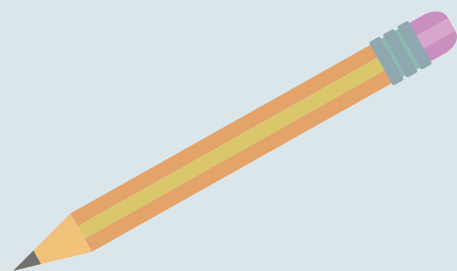
Gry mają poważny walor atrakcyjności dla wszystkich, także dla uczniów, którzy na co dzień lekcje matematyki traktują jak zło konieczne. Dla nich to czasem zaskakująca konstatacja – to także matematyka. Jaka ciekawa i wciągająca! Zakupienie takich gier do świetlicy pozwoli ćwiczyć w czasie pozalekcyjnym to, co jednocześnie jest przyjemne i pouczające.

Projekt „Szafa gier” czy „Planszówki na Narodowym” to przykłady upowszechniania matematyki obecnej w grach planszowych i jednocześnie inspiracja dla nas.



PODSUMOWANIE

To, w jaki sposób nasi uczniowie uczą się matematyki zależy od nas, nauczycieli. Czy chcemy wykształcić ludzi wprawnie stosujących odpowiednie procedury, czy chcemy uczyć myślenia, zaradności, samodzielności, aktywności? Im częściej stworzymy dzieciom okazje do samodzielności, tym szybciej będą samodzielne. Nie ma drogi na skróty. Nie nauczą się inaczej jak tylko praktykując. Nie można odwlekać tego momentu – to nie stanie się np. dopiero w ósmej klasie czy w liceum. Sytuacje sprzyjające myśleniu możemy stwarzać w każdej klasie, na każdej lekcji. Życzę Państwu, aby podane przykłady stały się inspiracją do kolejnych pomysłów na ciekawe, pełne radości i odkryć lekcje matematyki.





Bibliografia

- Dąbrowski M. (2006), https://cke.edu.pl/images/stories/EFS_konf/pozwolmy_ksiazka.pdf
- Dąbrowski M. (2015), <http://edukacjananowo.pl/do-czego-sluza-gry/>
- Dylak S. (2013) Poznań, https://edustore.eu/download/Strategia_Kształcenia_Wyprzedzajacego.pdf
- Ludwa A., Lorek M. (2015a) <https://naszelementarz.men.gov.pl/pliki/kl2/podreczniki/naszaskola-kl2-cz3-m.pdf>
- Ludwa A., Lorek M. (2015b) <https://naszelementarz.men.gov.pl/pliki/kl2/podreczniki/naszaskola-kl2-cz1-m.pdf>
- Marzano R. J. (2012) Sztuka i teoria skutecznego nauczania, Warszawa.
- Polak M. (2014) <https://www.edunews.pl/nowoczesna-edukacja/e-learning/2720-edukacja-hybrydowa-czyli-blended-learning-22>
- Pyżalski J. (2017) Małe dzieci w świecie technologii informacyjno-komunikacyjnych. Między utopijnymi szansami a przesadzonymi zagrożeniami, Łódź.
- Semadeni Z. (2016) Podejście konstruktywistyczne do matematycznej edukacji wczesnoszkolnej, Warszawa. http://bc.ore.edu.pl/dlibra/docmetadata?id=845&from=&dirids=1&ver_id=&lp=1&QI=
- Sterna D. (2014) Uczę się w szkole, Warszawa. <https://glowna.ceo.org.pl/publikacje/ksiazki-metodyczne-i-pomoce-dydaktyczne-ocenie-kszaltujace/ucze-sie-w-szkole>
- Zambrowska M. (2018) Pozwólmy dzieciom grać <http://www.ibe.edu.pl/pl/component/content/article/11-media/aktualnosci-prasowe/472-pozwolmy-dzieciom-grac-eksperti-ibe-zachecaja-do-nietypowej-nauki-matematyki>
- Żylińska M. (2013) Neurodydaktyka. Nauczanie i uczenie się przyjazne mózgowi, Toruń.

Redakcja i korekta:
Anna Busza

Opracowanie graficzne i skład:
Klaudia Karpeta

Poznań 2019

Fundacja Familijny Poznań
ul. Staszica 15
60-526 Poznań
www.familijny.pl

Materiały szkoleniowe powstały w ramach projektu nr POWR.02.10.00-00-5009/18 „Wielkopolska szkoła ćwiczeń w Cogito” w ramach Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój 2014-2020 współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego.